2

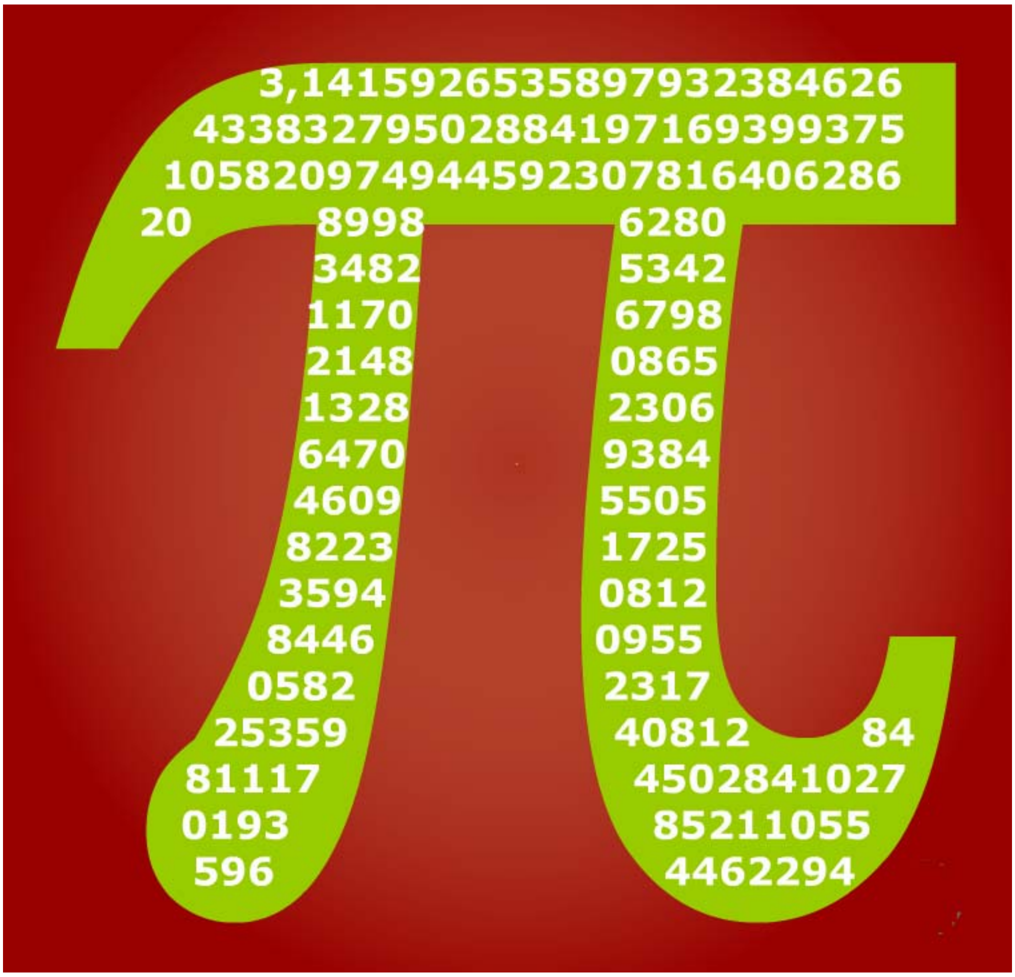
Números reales

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Clasificar los números reales en racionales e irracionales.
- Aproximar números reales por truncamiento y redondeo.
- Representar gráficamente números reales.
- Comparar números reales.
- Realizar operaciones sencillas con radicales.

Antes de empezar



Investiga

Seguramente hayas realizado alguna vez algún cálculo con el número pi; por ejemplo, calcular la longitud de alguna circunferencia o el área de un círculo. En estos cálculos habrás utilizado valores como 3'14, 3'1416, 3'141592,... También es posible que hayas leído en algún periódico que se ha descubierto otra cifra del número pi, o que ya se conocen con exactitud tantas cifras del número pi. Todo lo anterior resulta un poco confuso. ¿Cuál de las cantidades anteriores es el auténtico número pi? ¿Cómo es posible que llamemos pi a todas ellas si es obvio que son diferentes? ¿Cómo es posible que se estén descubriendo todavía cifras de pi si lo estamos usando desde hace un montón de años?

Intenta dar una respuesta a estas preguntas. Si no lo consigues ahora vuelve a intentarlo después de ver este tema en profundidad. Para finalizar la propuesta ahí va otra pregunta: ¿Cuál es o cuál podría ser la última cifra del número pi?

1. Los números reales

Números irracionales

En la quincena anterior has visto que los números racionales pueden escribirse en forma decimal, produciendo siempre un decimal exacto o periódico. También hemos visto que todo decimal periódico puede escribirse en forma de fracción.

Es fácil comprobar que hay números cuya expresión decimal no es periódica, por ejemplo:

0,12345678910111213 14.....

Estos números no se pueden escribir en forma de fracción: ***no son racionales***.

Llamamos **irracionales** a los números cuya parte decimal no es periódica.

REPRESENTACIÓN DE NÚMEROS IRRACIONALES

El hecho de que los números irracionales tengan infinitas cifras decimales que no se repiten de forma periódica plantea el problema de cómo representar dichos números de forma exacta.

Algunos de estos números pueden representarse de forma exacta. Por ejemplo:

$$\sqrt{2}\ ,\quad \frac{1+\sqrt{5}}{2}\ ,\quad \sqrt[3]{5}$$

son representaciones exactas de los números 1,41421356…; 1,61803398…; 1,709975947… respectivamente (los puntos suspensivos indican que no hay un final).

En cambio, otros números irracionales no pueden expresarse en forma exacta. Por ejemplo, el cociente entre la longitud de una circunferencia y su diámetro es una cantidad constante que es irracional pero no puede ser descrito en una forma sencilla como los números anteriores.

Para representar estos números de forma exacta les ponemos un nombre. En este caso se trata del número pi: π. Para hacer cálculos con estos números usamos un valor aproximado.

El número $\sqrt{2}$ es irracional *(ampliación)*

¿Cómo puede saberse si un número es irracional? No hay una técnica general pero en algunos casos puede usarse una técnica de demostración denominada ***reducción al absurdo*** que consiste en suponer que lo que se quiere probar es falso y llegar, a partir de esa suposición, a una contradicción. Eso implica que el hecho inicial no puede ser falso.

Lo que queremos probar es que $\sqrt{2}$ no es un número racional. *Para ello empezaremos suponiendo que sí lo es.*

Por tanto puede escribirse en forma de fracción que podemos convertir en irreducible simplificando todo lo que se pueda. Así pues, existirían dos números enteros, **m** y **n**, sin factores primos comunes de forma que

$$\sqrt{2}=\frac{n}{m}=\frac{p1\cdot p2\cdot\ldots\cdot pr}{q1\cdot q2\cdot\ldots\cdot qs}$$

Siendo p1, p2,…,pr los factores primos de n y q1, q2,…,qr los factores primos de m y todas las p son distintas de todas las q. Elevando al cuadrado queda:

$$2=\frac{n^2}{m^2}=\frac{p1^2\cdot p2^2\cdot\ldots\cdot pr^2}{q1^2\cdot q2^2\cdot\ldots\cdot qs^2}$$

Y n^2 y m^2 siguen sin tener factores primos comunes. Por tanto, $n^2=2m^2$, de donde se deduce que n es divisible por 2 y por tanto puede escribirse como n=2t. Así pues:

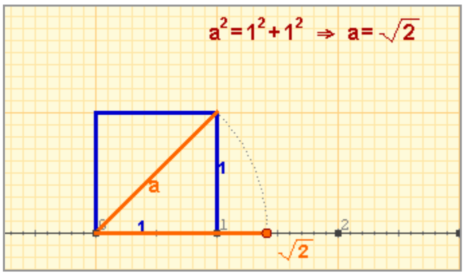
$$\sqrt{2}=\frac{2t}{m}$$

Y t y m no tienen factores primos comunes. Elevando de nuevo al cuadrado queda:

$$2=\frac{4t^2}{m^2}\Rightarrow 2m^2=4t^2\Rightarrow m^2=2t^2$$

Por tanto, m también es divisible por 2. Partiendo de que n y m no tienen factores primos comunes hemos llegado a la conclusión de que ambos son múltiplos de 2. Hemos llegado a una **contradicción**. Por tanto la suposición de que este número es racional es falsa y **deducimos de ello que** $\sqrt{2}$ **es irracional**.

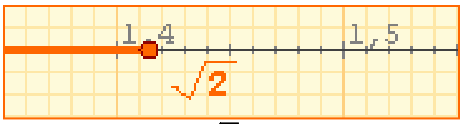
Números reales



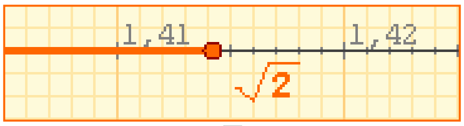
$\mathbb{R}$ El conjunto de los números reales, denotado por la letra R con la forma que ves a la izquierda, está formado por todos los números racionales y todos los números irracionales. Es decir, todos los números que pueden escribirse en forma decimal, sea ésta exacta, periódica o no periódica.

Esto engloba a todos los tipos de números que conocemos hasta el momento.

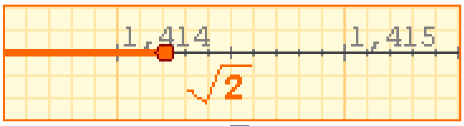
$$\text{R Reales}\begin{cases}\text{Q Racionales}\begin{cases}\text{Z Enteros}\begin{cases}\text{N Naturales}\\ \text{Cero}\\ \text{Enteros negativos}\end{cases}\\ \text{Fraccionarios}\end{cases}\\ \text{Irracionales}\end{cases}$$



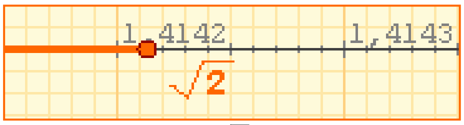
$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$



$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$



$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$



$1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143$

Aproximaciones

Como has comprobado, los números reales tienen infinitas cifras decimales, por lo que, en general, no es posible dar su valor exacto. En algunos casos, como los racionales (con la fracción generatriz) y los radicales, sí es posible representarlos de forma exacta. Pero en infinidad de otros casos (como el número π) esto no es posible.

Cuando en un problema necesitamos usar un número con infinitas cifras decimales, en la práctica usamos un valor aproximado que nos permita obtener un resultado aceptable aunque no sea exacto.

Una aproximación es **por defecto** si es menor que el número exacto y **por exceso** si es mayor.

- ✓ Cuando en un decimal nos quedamos con las n primeras cifras decimales decimos que hemos realizado un **truncamiento** con n cifras significativas.
- ✓ Realizamos un **redondeo** con n cifras significativas, si truncamos con n cifras, dejando igual la cifra n-ésima si la siguiente es menor que 5, y aumentando la última cifra en una unidad en caso contrario.

Observa los ejemplos de la izquierda donde se toman distintas aproximaciones de $\sqrt{2}$.

TRUNCAMIENTO	REDONDEO
1,4	1,4
1,41	1,41
1,414	1,414
1,4142	1,4142
1,41421	1,41421
1,414213	1,414214
1,4142135	1,4142136
1,41421356	1,41421356

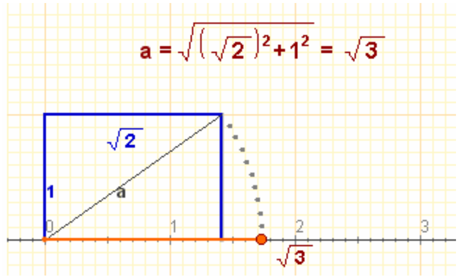
Un truncamiento siempre es una aproximación por defecto; el redondeo puede ser por defecto o por exceso.

Representación gráfica de números irracionales

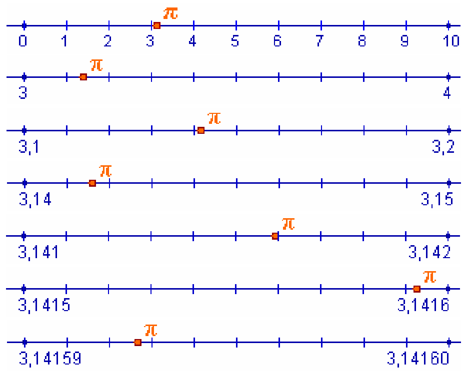
En este tema hemos visto ya las dificultades de representar de forma exacta los números irracionales, dificultades que se trasladan a su representación gráfica.

A la derecha puedes ver distintas técnicas usadas para la representación en forma gráfica de números irracionales. En algún caso pueden usarse métodos geométricos de gran exactitud, pero en la mayoría de los casos sólo podemos realizar una representación aproximada, eso sí, con el nivel de precisión que queramos.

Estos métodos garantizan que puede asociarse de manera única un punto de la recta a cada número real y, recíprocamente, un número real a cada punto de la recta. Por este motivo suele identificarse al conjunto **R** de los números reales con una recta, a la que se denomina **recta real**.



π = 3,141592353589793...

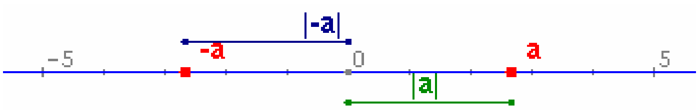


De esta forma podemos acotar π entre dos números racionales, que ya sabemos representar, y que están cada vez más próximos.

Valor absoluto

La equivalencia entre puntos y números permite aplicar conceptos geométricos al cálculo, en particular la idea de distancia mediante el valor absoluto de un número.

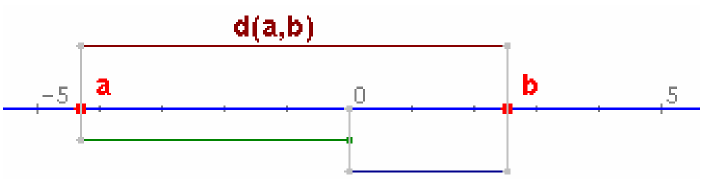
- ✓ Llamamos valor absoluto de un número real, **a**, al mayor de los números **a** y **-a**. El valor absoluto de **a** se representa así: **|a|**.

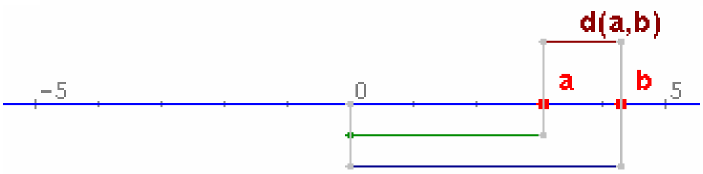


El valor absoluto de un número representa la distancia del mismo al cero. Podemos generalizar esta idea:

- ✓ La **distancia** entre dos números reales, **a** y **b**, es el valor absoluto de su diferencia:

d(a,b)=|b-a|=|a-b|





Propiedades del valor absoluto

1) $|a| \geq 0$

2) $|a|=|-a|$

3) $|a+b| \leq |a|+|b|$

4) $|a \cdot b|=|a| \cdot |b|$

5) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

a=2,6828	**|a|=2,6828**
-a=-2,6828	**|-a|=2,6828**

Si a y b tienen el mismo signo la distancia entre a y b es la resta de los valores absolutos, y si el signo es distinto la suma.

a=-4,2946	**|a|=4,2946**
b=2,5447	**|b|=2,5447**

d(a,b)=6,8393

a=3,0054	**|a|=3,0054**
b=4,2861	**|b|=4,2461**

d(a,b)=1,2807

Intervalo cerrado:
Los extremos pertenecen al intervalo.

$$[\mathbf{a,b}] = \{x \in R \,/\, a \le x \le b\}$$

Intervalo abierto:
Los extremos no pertenecen al intervalo.

$$(\mathbf{a,b}) = \{x \in R \,/\, a < x < b\}$$

Intervalo semiabierto: Un extremo pertenece al intervalo y otro no.

$$(\mathbf{a,b}] = \{x \in R \,/\, a < x \le b\}$$

Entorno simétrico de a:

$$(\mathbf{a\text{-}r,a+r}) = \{x \in R \,/\, a - r < x < a + r\}$$

Semirrecta acotada superiormente

$$(-\infty,\mathbf{b}] = \{x \in R \,/\, x \le b\}$$

Semirrecta acotada inferiormente

$$(\mathbf{a},+\infty) = \{x \in R \,/\, a < x\}$$

Intervalos: segmentos y semirrectas

El concepto de intervalo está ligado a los conceptos geométricos de segmento y semirrecta: un intervalo acotado equivale a un segmento y un intervalo no acotado equivale a una semirrecta.

- ✓ Dados dos números reales **a** y **b**, se llama **intervalo de extremos a y b** al conjunto de números reales comprendidos entre ambos.
- ✓ La longitud del intervalo es la distancia(a,b)=**|b-a|**

En los **intervalos acotados** dependiendo de que los extremos pertenezcan o no al mismo, se distinguen los intervalos cerrados, abiertos y semiabiertos (por la izquierda o por la derecha).

Si se construye un intervalo abierto alrededor de un punto a se obtiene un **entorno simétrico de a y de radio r,** conjunto de números reales cuya distancia a "a" es menor que r.

Un **intervalo no acotado** es el conjunto formado por todos los números mayores (o ≥), o menores (o ≤) que uno dado, a, la cota inferior o superior respectivamente. Se representan mediante una semirrecta y su longitud es infinita.

EJERCICIOS resueltos

1. Indicar el menor de los conjuntos numéricos a los que pertenecen los números:

$$\text{a) } 5{,}97509\ldots \quad \text{b) } 6{,}10\widehat{3} \quad \text{c)}\frac{2}{3} \quad \text{d)}-\frac{6}{2} \quad \text{e) } \sqrt{5} \quad \text{f)}\sqrt{16}$$

a) R *(decimal no periódico)* ***b) Q*** *(decimal periódico)* ***c) Q*** *(fracción no exacta)*

d) Z *(fracción exacta negativa)* ***e) R*** *(radical no exacto)* ***f) N*** *(radical exacto)*

2. El radio de una circunferencia es de 4 m. Calcula su longitud

2.1. Truncando el resultado primero a cm y luego a m.

L = 2·π·r =24,88141381...m = 2488 cm = 24 m

2.2. Redondeando el resultado primero a cm y luego a m

L = 2·π·r =24,88141381...m = 2488 cm = 25 m

3. Calcula el valor absoluto de los números a=-3 y b=5, y la distancia entre ellos.

|a|=3, |b|=5, dist(a,b)=|b-a|=|5-(-3)|=|8|=8

4. Calcula |a+b| |a-b| |a·b| y |a/b|

|a+b|=|-3+5|=|2|=2; |a-b|=|-3-5|=|-8|=8; |a·b|=|-3·5|=|-15|=15;

|a/b|=|-3/5|=3/5

5. Indica qué puntos pertenecen al intervalo en cada caso:

5.1. Intervalo (-74,-52]. Puntos: a) −53 b) −74 c) 11 ***Respuesta: a***

5.2. Intervalo (-∞,75]. Puntos: a) 32 b) 75 c) 76 ***Respuesta: a y b.***

2. Radicales

Forma exponencial

Llamamos **raíz n-ésima** de un número dado, *a*, al número *b* que elevado a *n* nos da *a*.

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a}$$

Un **radical** es equivalente a una **potencia de exponente fraccionario** en la que el **denominador** de la fracción es el **índice** del radical y el **numerador** de la fracción es el **exponente** el radicando.

$$\boxed{\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}}$$

$$\sqrt[3]{8} = 2 \text{ por ser } 2^3 = 8$$

$$\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt[5]{x^2} = x^{\frac{2}{5}}$$

Radicales equivalentes

Dos o más radicales se dicen **equivalentes** si las fracciones de los exponentes de las potencias asociadas son equivalentes.

Dado un radical se pueden obtener infinitos radicales semejantes, **multiplicando** o **dividiendo** el exponente del radicando y el índice de la raíz por un mismo número. Si se multiplica se llama **amplificar** y si se divide se llama **simplificar** el radical.

Radical **irreducible**, cuando la fracción de la potencia asociada es irreducible.

$$\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[6]{x^4}$$

son equivalentes por ser: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$

Amplificar: $\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3\cdot2]{x^{2\cdot2}} = \sqrt[6]{x^4}$

Simplificar: $\sqrt[6]{x^4} = \sqrt[6:2]{x^{4:2}} = \sqrt[3]{x^2}$

$\sqrt[3]{x^2}$

Irreducible por ser m.c.d.(3,2)=1

EJERCICIOS resueltos

6. Escribe los siguientes radicales como potencia de exponente fraccionario:

a) $\sqrt[5]{3}$ $\quad \sqrt[5]{3} = 3^{\frac{1}{5}}$ $\qquad$ b) $\sqrt[5]{x^3}$ $\quad \sqrt[5]{x^3}$

7. Escribe las siguientes potencias como radicales:

a) $7^{\frac{1}{2}}$ $\quad 7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$ $\qquad$ b) $5^{\frac{2}{3}}$ $\quad 5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$

8. Escribe un radical equivalente, amplificando el dado:

a) $\sqrt[3]{5}$ $\quad \sqrt[3]{5} = \sqrt[3\cdot2]{5^{1\cdot2}} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25}$ $\qquad$ b) $\sqrt[5]{x^4}$ $\quad \sqrt[5]{x^4} = \sqrt[5\cdot3]{x^{4\cdot3}} = \sqrt[15]{x^{12}}$

9. Escribe un radical equivalente, simplificando el dado.

a) $\sqrt[6]{49}$ $\quad \sqrt[6]{49} = \sqrt[6]{7^2} = \sqrt[6:2]{7^{2:2}} = \sqrt[3]{7}$

b) $\sqrt[35]{x^{28}}$ $\quad \sqrt[35]{x^{28}} = \sqrt[35:7]{x^{28:7}} = \sqrt[5]{x^4}$

3. Propiedades de las raíces

$$\sqrt[3]{2\cdot 5} = \sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{5}$$

$$\sqrt[7]{a^2\cdot b^4} = \sqrt[7]{a^2}\cdot\sqrt[7]{b^4}$$

Raíz de un producto

La raíz n-ésima de un producto es igual al producto de las raíces n-ésimas de los factores.

$$\sqrt[n]{a\cdot b} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$$

Demostración: $\sqrt[n]{a\cdot b} = (a\cdot b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}}\cdot b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$

$$\sqrt[5]{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{3}}$$

$$\sqrt[5]{\frac{a^4}{b^3}} = \frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[5]{b^3}}$$

Raíz de un cociente

La raíz n-ésima de un cociente es igual al cociente de las raíces n-ésimas del dividendo y del divisor.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Demostración: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

$$\sqrt[5]{8} = \sqrt[5]{2^3} = \left(\sqrt[5]{2}\right)^3$$

$$\sqrt[3]{x^7} = \left(\sqrt[3]{x}\right)^7$$

Raíz de una potencia

Para hallar la raíz de una potencia, se calcula la raíz de la base y luego se eleva el resultado a la potencia dada.

$$\sqrt[n]{a^p} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p$$

Demostración: $\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^p = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p$

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[15]{2}$$

Raíz de una raíz

La **raíz n-ésima** de la **raíz m-ésima** de un número es igual a la raíz **nm-ésima** de dicho número.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$$

Demostración: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n\cdot m}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$

EJERCICIOS resueltos

10. Escribe con una sola raíz:

a) $\sqrt[5]{\sqrt{3}}$ $\qquad \sqrt[5]{\sqrt{3}} = \sqrt[10]{3}$

b) $\sqrt[7]{x^4\sqrt{x}}$ $\qquad \sqrt[7]{x^4\sqrt{x}} = \sqrt[7]{\sqrt{x^8 \cdot x}} = \sqrt[14]{x^9}$

11. Escribe con una sola raíz:

a) $\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{27}$ $\qquad \sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{27} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

b) $\sqrt[5]{x}\cdot\sqrt[5]{x^2}$ $\qquad \sqrt[5]{x}\cdot\sqrt[5]{x^2} = \sqrt[5]{x^3}$

12. Escribe con una sola raíz:

a) $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$ $\qquad \dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\dfrac{16}{2}} = \sqrt[3]{8} = 2$

b) $\dfrac{\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x^3}}$ $\qquad \dfrac{\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x^3}} = \sqrt[5]{\dfrac{x^4}{x^3}} = \sqrt[5]{x}$

4. Operaciones con raíces

Introducción y Extracción de factores

Para **introducir** un factor dentro de un radical se eleva el factor a la potencia que indica el índice y se escribe dentro.

Si algún factor del radicando tiene por exponente un número mayor que el índice, se puede **extraer** fuera del radical dividiendo el exponente del radicando entre el índice. El cociente es el exponente del factor que sale fuera y el resto es el exponente del factor que queda dentro.

Introducir

$$x\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x^3 \cdot x} = \sqrt[3]{x^4}$$

$$2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{8 \cdot 3} = \sqrt[3]{24}$$

Extraer:

$$\sqrt[5]{x^{13}} = x^2\sqrt[5]{x^3} \qquad \begin{array}{r|l} 13 & 5 \\ \hline 3 & 2 \end{array}$$

Cálculo de raíces

Para calcular la raíz n-ésima de un número primero se factoriza y se escribe el número como producto de potencias, luego se extraen todos los factores.

Si todos los exponentes del radicando son múltiplos del índice, la raíz es exacta.

Esta técnica es muy útil para hallar raíces exactas. Cuando la raíz no es exacta esta técnica transforma el radical en una expresión *más manejable*.

$$\begin{array}{r|l} 1728 & 2 \\ 864 & 2 \\ 432 & 2 \\ 216 & 2 \\ 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\sqrt[3]{1728} = \sqrt[3]{2^6 \cdot 3^3} = 2^2 \cdot 3 = 12$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{20}-\frac{3}{2}\sqrt{20}+\frac{7}{2}\sqrt{20}=$$
$$=\left(-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}+\frac{7}{2}\right)\sqrt{20}=\frac{3}{2}\sqrt{20}$$

$$-\frac{1}{8}\sqrt{45}+\frac{3}{4}\sqrt{5}=$$
$$=-\frac{1}{8}\sqrt{3^2\cdot 5}+\frac{3}{4}\sqrt{5}=$$
$$=-\frac{3}{8}\sqrt{5}+\frac{3}{4}\sqrt{5}=$$
$$=\left(-\frac{3}{8}+\frac{3}{4}\right)\sqrt{5}=\frac{3}{8}\sqrt{5}$$

Sumas y Restas

Dos expresiones radicales son **semejantes** si tienen el mismo índice y el mismo radicando. Por ejemplo:

$$\frac{1}{8}\sqrt[12]{31} \qquad 2\sqrt[12]{31}$$

Solo se pueden ***sumar*** o ***restar*** radicales semejantes. Para ello se saca factor común el radical correspondiente y se suman o restan los coeficientes.

En ocasiones podemos sumar radicales no semejantes extrayendo algún factor que los convierta en semejantes.

$$\left(-\frac{1}{4}\sqrt{6300}\right)\cdot\left(\frac{1}{5}\sqrt{196}\right)=$$
$$=-\frac{1}{20}\sqrt{2^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7}\cdot\sqrt{2^2\cdot 7^2}=$$
$$=-\frac{1}{20}\sqrt{2^4\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^3}=$$
$$=-\frac{1}{20}\cdot 2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\sqrt{7}=$$
$$=-21\sqrt{7}$$

Productos

Dos expresiones radicales pueden multiplicarse sólo si tienen el mismo índice. En este caso el producto se hace de la siguiente manera:

$$\left(a\cdot\sqrt[n]{b}\right)\cdot\left(c\cdot\sqrt[n]{d}\right)=ac\cdot\sqrt[n]{bd}$$

comprobando al final si puede extraerse algún factor del radical.

Si los radicales no son del mismo índice, primero se buscan radicales semejantes que tengan el mismo índice y luego se multiplican. Ejemplo:

$$\left(2\cdot\sqrt[3]{x}\right)\cdot\left(7\cdot\sqrt{x}\right)=14\cdot\sqrt[6]{x^2}\cdot\sqrt[6]{x^3}=14\cdot\sqrt[6]{x^5}$$

Aquí solo veremos radicales cuadráticos.

$$\frac{\frac{2}{3}\sqrt{6}}{9\sqrt{18}}=\frac{2\sqrt{6}}{27\sqrt{18}}=$$
$$=\frac{2\sqrt{6}\sqrt{18}}{27\sqrt{18}\sqrt{18}}=\frac{2\sqrt{108}}{27\cdot 18}=$$
$$=\frac{\sqrt{108}}{243}=\frac{\sqrt{2^2 3^3}}{243}=$$
$$=\frac{2\cdot 3\sqrt{3}}{243}=\frac{2\sqrt{3}}{81}$$

Cocientes

Dos expresiones radicales pueden dividirse sólo si tienen el mismo índice. En este caso el cociente se hace como se ve en la imagen:

$$\frac{a\cdot\sqrt[n]{b}}{c\cdot\sqrt[n]{d}}=\frac{a}{c}\cdot\sqrt[n]{\frac{b}{d}}$$

En la práctica no suelen dejarse radicales en el denominador y en lugar de hacer así la división se utiliza otro método llamado **racionalización** que consiste en encontrar una fracción equivalente que no tenga radicales en el denominador.

En el cuadro adjunto describimos este método para radicales cuadráticos.

EJERCICIOS resueltos

13. Introduce los factores dentro del radical:

a) $2\cdot\sqrt[4]{3}$ $\qquad 2\cdot\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{2^4\cdot 3}=\sqrt[4]{16\cdot 3}=\sqrt[4]{48}$

b) $x^2\sqrt[7]{x^3}$ $\qquad x^2\sqrt[7]{x^3}=\sqrt[7]{(x^2)^7\cdot x^3}=\sqrt[7]{x^{14}\cdot x^3}=\sqrt[7]{x^{17}}$

14. Extrae los factores del radical:

a) $\sqrt[4]{128}$ $\qquad \sqrt[4]{128}=\sqrt[4]{2^7}=2\sqrt[4]{2^3}=2\sqrt[4]{8}$

b) $\sqrt[7]{x^{30}}$ $\qquad \sqrt[7]{x^{30}}=\sqrt[7]{x^{28+2}}=\sqrt[7]{x^{28}\cdot x^2}=x^4\sqrt[7]{x^2}$

15. Calcular las siguientes raíces:

a) $\sqrt[5]{1024}$ $\qquad \sqrt[5]{1024}=\sqrt[5]{2^{10}}=2^2=4$

b) $\sqrt[7]{x^{84}}$ $\qquad \sqrt[7]{x^{84}}=\sqrt[7]{x^{12\cdot 7}}=\sqrt[7]{(x^{12})^7}=x^7$

16. Indica que radicales son semejantes

a) $\sqrt[4]{3};5\sqrt[4]{3}$ $\qquad \sqrt[4]{3}$ y $5\sqrt[4]{3}$ Son semajentes

b) $\sqrt[4]{x};\sqrt[3]{x}$ $\qquad \sqrt[4]{x}$ y $\sqrt[3]{x}$ No son semajentes,tienen distinto indice

17. Calcular la suma:

a) $\sqrt{40}+\sqrt{90}$ $\qquad \sqrt{40}+\sqrt{90}=\sqrt{4\cdot 10}+\sqrt{9\cdot 10}=2\sqrt{10}+3\sqrt{10}=5\sqrt{10}$

b) $2\sqrt{32}-\sqrt{8}$ $\qquad 2\sqrt{32}-\sqrt{8}=2\sqrt{2^5}-\sqrt{2^3}=2\cdot 2^2\sqrt{2}-2\sqrt{2}=8\sqrt{2}-2\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

18. Calcular el producto:

a) $\left(\frac{6}{7}\sqrt{14}\right)\cdot\left(-\frac{7}{3}\sqrt{252}\right)$

$$\left(\frac{6}{7}\sqrt{14}\right)\cdot\left(-\frac{7}{3}\sqrt{252}\right)=-\frac{6\cdot 7}{7\cdot 3}\sqrt{2\cdot 7}\cdot\sqrt{2^2\cdot 3^2\cdot 7}=-2\sqrt{2^3\cdot 3^2\cdot 7^2}=-2\cdot 2\cdot 3\cdot 7\sqrt{2}=-84\sqrt{2}$$

b) $\left(-\frac{5}{3}\sqrt{175}\right)\cdot\left(-2\sqrt{45}\right)$

$$\left(-\frac{5}{3}\sqrt{175}\right)\cdot\left(-2\sqrt{45}\right)=\frac{10}{3}\sqrt{5^2\cdot 7}\sqrt{3^2\cdot 5}=\frac{10}{3}\sqrt{3^2\cdot 5^3\cdot 7}=\frac{10}{3}\cdot 3\cdot 5\sqrt{5\cdot 7}=50\sqrt{35}$$

19. Calcular el cociente:

$$\frac{\frac{9}{2}\sqrt{24}}{4\sqrt{108}}$$

$$\frac{\frac{9}{2}\sqrt{24}}{4\sqrt{108}}=\frac{9\sqrt{24}}{\sqrt{1088}}=\frac{9\sqrt{24}\sqrt{108}}{8\sqrt{108}\sqrt{108}}=\frac{9\sqrt{2592}}{8\cdot 108}=\frac{\sqrt{2^5\cdot 3^4}}{96}=\frac{2^2\cdot 3^2\sqrt{2}}{96}=\frac{3\sqrt{2}}{8}$$

Para practicar

1. Considerando 7,4833147735.... como el valor exacto de $\sqrt{56}$, escribe las aproximaciones por defecto, por exceso y redondeos de orden primero y segundo (décimas y centésimas, respectivamente).

2. La cinta métrica que aparece abajo tiene unas divisiones hasta el medio cm. La utilizamos para medir una varilla y obtenemos el valor que se muestra en ella. ¿Entre qué valores exactos se encuentra la longitud real, suponiendo que ese valor es: a)por defecto; b) por exceso; c) redondeo a cm.

Las aproximaciones pueden utilizarse también con números enteros. Para generalizar esta idea usaremos el concepto de cifras significativas: "*Si un número N es un valor aproximado de otro número P, diremos que N tiene n cifras significativas si las primeras n cifras de N coinciden con las n primeras cifras de P. (No se consideran cifras significativas los ceros cuya única finalidad es situar la coma decimal)*". La definición anterior es bastante intuitiva pero no siempre es correcta del todo., por ello precisamos un poco más: "*Diremos que N tiene n cifras significativas si el número formado con las n primeras cifras de N difiere del número formado con las n primeras cifras de P (eliminando las comas decimales si las hubiera) en menos de 0,5*".

3. Nos dicen que la población de una ciudad es de 1579000 habitantes y que las 4 primeras cifras de esta cantidad son significativas. ¿Entre qué valores se halla realmente su población?

4. Determina los conjuntos A∩B, AUB, A-B y -A en los casos siguientes:
   1. A = [-11,-9] B = (-1,6)
   2. A = [-5,5] B = (3,4)
   3. A = [-2,7] B = (-2,6)

5. Escribe como potencia de exponente fraccionario:

   a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt[3]{x^2}$ c) $\sqrt{a^3}$ d) $\sqrt[5]{a^3}$

6. Escribe como un radical:

   a) $3^{\frac{1}{2}}$ b) $5^{\frac{3}{2}}$ c) $x^{\frac{1}{5}}$ d) $x^{\frac{5}{3}}$

7. Extraer todos los factores posibles de los siguientes radicales

   a) $\sqrt{18}$ b) $\sqrt[3]{16}$

   c) $\sqrt{9a^3}$ d) $\sqrt{98a^3b^5c^7}$

8. Introducir dentro del radical todos los factores posibles que se encuentren fuera de él.

   a) $3\cdot\sqrt{5}$ b) $2\cdot\sqrt{a}$

   c) $3a\cdot\sqrt{2a^2}$ d) $ab^2\sqrt[3]{a^2b}$

9. Suma los siguientes radicales indicados.

   a) $\sqrt{45}-\sqrt{125}-\sqrt{20}$

   b) $\sqrt{75}-\sqrt{147}+\sqrt{675}-\sqrt{12}$

   c) $\sqrt{175}+\sqrt{63}-2\sqrt{28}$

   d) $\sqrt{20}+\frac{1}{3}\sqrt{45}+2\sqrt{125}$

10. Realiza las operaciones siguientes:

    a) $\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{2}$

    b) $(7\sqrt{5}+5\sqrt{3})\cdot 2\sqrt{3}$

    c) $(2\sqrt{3}+\sqrt{5}-5\sqrt{2})\cdot 4\sqrt{2}$

    d) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{5}-\sqrt{3})$

11. Divide los siguientes radicales

    a) $\dfrac{\sqrt{6x}}{\sqrt{3x}}$ b) $\dfrac{\sqrt{75x^2y^3}}{5\sqrt{3xy}}$

Para saber más

Cuestiones sobre pi

En la presentación del tema se mencionaba que el valor de pi era 3'14, 3'1416, ... y se planteaban una serie de preguntas al respecto:

¿Cuál de las cantidades anteriores es el auténtico número pi?

Según has visto a lo largo del tema, en realidad ninguna de las anteriores cantidades son el valor exacto de pi, se trata de aproximaciones al número y el poner más o menos decimales depende de la precisión que necesitemos en la medida.

¿Cómo es posible que llamemos pi a todas ellas si es obvio que son diferentes?

El hecho de que llamemos pi a cualquiera de las anteriores cantidades se debe a que es imposible utilizar el valor exacto de la mayoría de los números irracionales, por lo que nos tenemos que contentar con dar aproximaciones a ese valor. Como ya dijimos antes el número de cifras decimales con que se da este número dependerá de la precisión de medida deseada y el hecho de que, por ejemplo, la cuarta cifra decimal sea un 6 en 3'1416 y un 5 en 3'14159 se debe a que la aproximación se hace en cada caso por redondeo y, con cuatro cifras decimales, 3'1416 está más próximo del valor exacto que 3'1415.

Algunos números irracionales como la raíz cuadrada de 2 sí pueden representarse en forma exacta, pero si esa cantidad la queremos medir en la práctica, no nos quedará más remedio que dar un valor aproximado con la precisión que deseemos.

¿Cómo es posible que se estén descubriendo todavía cifras de pi si lo estamos usando desde hace un montón de años?

Los números irracionales tienen infinitas cifras decimales que no se repiten de forma periódica. Para hallar estas cifras existen distintos procedimientos o algoritmos. Algunos de estos algoritmos son relativamente sencillos, como el que se utiliza para obtener las cifras decimales de la raíz cuadrada de 2 (que antiguamente se enseñaba en la escuela primaria); otros, en cambio, son tremendamente largos y complejos. El número pi está en este segundo grupo. Actualmente los algoritmos para el cálculo de cifras decimales de pi se ejecutan con potentes ordenadores.

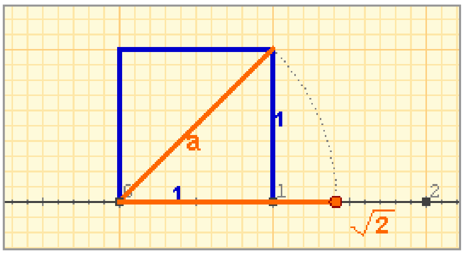
¿Cuál es o cuál podría ser la última cifra del número pi?

Como hemos dicho antes, los números irracionales tienen infinitas cifras decimales, por lo tanto no existe la última cifra del número pi. Como además sus cifras no se repiten de forma periódica no se puede predecir de antemano qué cifra será la que ocupe un determinado lugar hasta que se consiga calcular.

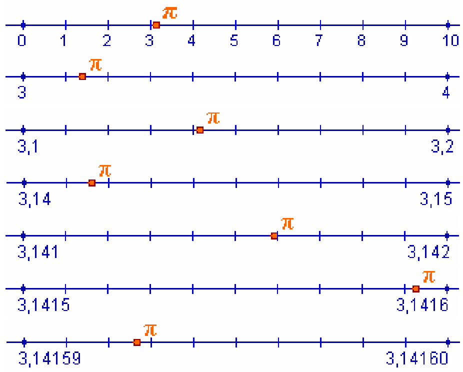
Recuerda lo más importante

Los números reales

Los números **irracionales** son los decimales no periódicos. El conjunto **R** de los números **reales** está formado por todos los números racionales e irracionales.



Todos los números reales, tanto los racionales como los irracionales, se pueden representar mediante un punto de la recta y recíprocamente, a cada punto de la recta le corresponde un número real.



Aproximaciones

Para representar decimales infinitos usamos aproximaciones **por defecto** y **por exceso**, **truncamientos** y **redondeos**.

Propiedades de los radicales

$$\sqrt[n]{A\cdot B}=\sqrt[n]{A}\cdot\sqrt[n]{B} \qquad \sqrt[n]{\frac{A}{B}}=\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}$$

$$\sqrt[n]{A^p}=\left(\sqrt[n]{A}\right)^p \qquad \sqrt[p]{\sqrt[n]{A}}=\sqrt[np]{A}$$

Raíz n-ésima

$$\sqrt[n]{a}=b\Leftrightarrow b^n=a$$

Exponente fraccionario

$$\sqrt[n]{A^p}=A^{\frac{p}{n}}$$

Radicales equivalentes

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$$

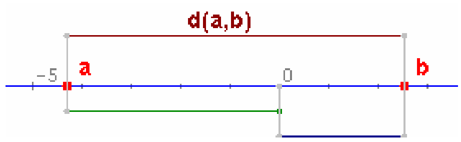
Radicales semejantes

Son radicales con el mismo índice y el mismo radicando, pudiendo diferir en su coeficiente.

La recta real

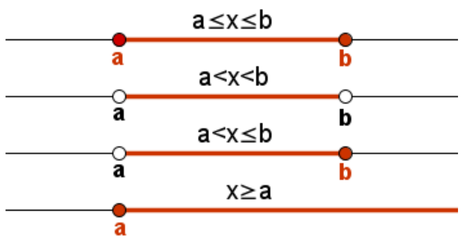
El **valor absoluto** de un nº a, **|a|** es el nº prescindiendo del signo.

La **distancia** entre dos puntos **a** y **b** es el valor absoluto de su diferencia **|a-b|=|b-a|**



Intervalos: segmentos y semirrectas

- Intervalo cerrado **[a,b]**
- Intervalo abierto **(a,b)**
- Intervalo semiabierto **(a,b]** ó **[a,b)**
- Intervalo no acotado como **[a,+∞)** ó **(-∞,a)**



Autoevaluación

1. Indica el menor conjunto numérico al que pertenece el número

$$12,80\overset{\frown}{965}$$

2. Una milla inglesa son 1609,34 m. Redondea a km 27 millas.

3. Con la calculadora, escribe un truncamiento y un redondeo a las milésimas de $\sqrt{21}$

4. Escribe el intervalo $[-3, 5] \cap (3, 8)$.

5. Calcula la siguiente raíz: $\sqrt[7]{78125}$

6. Escribe en forma de exponente fraccionario: $\sqrt[10]{x^3}$

7. Introduce el factor en el radical: $6\sqrt[4]{5}$

8. Extrae los factores del radical: $\sqrt[4]{243}$

9. Calcula: $\sqrt{18} - \sqrt{98}$

10. Calcula y simplifica: $\sqrt{x^{10} \cdot y^9} \cdot \sqrt{x^4 \cdot y^5}$

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. a) De primer orden:

Por defecto: 7,4

Por exceso: 7,5

Redondeo: 7,5

b) De segundo orden:

Por defecto: 7,48

Por exceso: 7,49

Redondeo: 7,48

2. a) Entre 1,100 y 1,105 m

b) Entre 1,095 y 1,100 m

c) Entre 1,095 y 1,105 m

3. Entre 1578500 y 1579500 con una cota de error de 500 habitantes.

4. Caso 1

1) $A \cap B$ = vacío
2) $A \cup B = [-11,-9] \cup (-1,6)$
3) $A - B = A = [-11,-9]$
4) $-A = (-\infty,-11) \cup (-9,+\infty)$

Caso 2

1) $A \cap B = (3,4)$
2) $A \cup B = [-5,5]$
3) $A - B = [-5,3] \cup [4,5]$
4) $-A = (-\infty,-5) \cup (5,+\infty)$

Caso 3

1) $A \cap B = [-2,6)$
2) $A \cup B = [-2,7]$
3) $A - B = [6,7]$
4) $-A = (-\infty,-2) \cup (7,+\infty)$

5. a) $5^{\frac{1}{2}}$ b) $x^{\frac{2}{3}}$
c) $a^{\frac{3}{2}}$ d) $a^{\frac{3}{5}}$

6. a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{5^3}$
c) $\sqrt[5]{x}$ d) $\sqrt[3]{x^5}$

7. a) $3\sqrt{2}$ b) $2\sqrt[3]{2}$
c) $3a\sqrt{a}$ d) $7ab^2c^3\sqrt[3]{2abc}$

8. a) $\sqrt{45}$ b) $\sqrt{4a}$
c) $\sqrt{18a^4}$ d) $\sqrt[3]{a^5b^7}$

9. a) $-4\sqrt{5}$ b) $11\sqrt{3}$
c) $4\sqrt{7}$ d) $15\sqrt{5}$

10. a) $2-\sqrt{6}$
b) $14\sqrt{5}+30$
c) $8\sqrt{6}+4\sqrt{10}-20$
d) 2

11. a) $\sqrt{2}$ b) $y\sqrt{x}$

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. **Q** (decimal periódico)

2. 43 km

3. redon.: 4,583 trun.: 4,582

4. (3,5]

5. 5 ($78125=5^7$)

6. $x^{\frac{3}{10}}$

7. $\sqrt[4]{6480}$

8. $3\sqrt[4]{3}$

9. $-4\sqrt{2}$

10. x^7y^7

No olvides enviar las actividades al tutor ▶